DOI:10.13471/j.cnki.acta.snus.2020A029

完全分配可交换子空间格代数上的非线性广义 Lie 导子*

马飞[1]，张建华[2]，刘红哲[1]

1. 咸阳师范学院数学与信息科学学院，陕西 咸阳 712000
2. 陕西师范大学数学与信息科学学院，陕西 西安 710062

摘　要：设 Alg$\mathcal{L}$ 是 Hilbert 空间 H 上的一个完全分配可交换子空间格代数，f 是 Alg$\mathcal{L}$ 上的非线性广义 Lie 导子，d 是 Alg$\mathcal{L}$ 上与 f 相关的非线性映射，则 f 和 d 分别是可加广义导子和交换子上为零的映射之和。

关键词：完全分配可交换子空间格代数；非线性广义 Lie 导子；广义导子

中图分类号：O177.2　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**2097－0137（2022）04－0170－08

Nonlinear generalized Lie derivations on completely distributive commutative subspace lattice algebras

MA Fei[1], *ZHANG Jianhua*[2], *LIU Hongzhe*[1]

1. *College of Mathematics and Information Science, Xianyang Normal University, Xianyang 712000, China*
2. *College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China*

Abstract: Let Alg$\mathcal{L}$ be a completely distributive commutative subspace lattice algebra, f be a nonlinear generalized Lie derivation on Alg$\mathcal{L}$ with an associated nonlinear map d. Then f and d are the sum of an additive generalized derivation and a map into its center sending each commutator to zero, respectively.

Key words: completely distributive commutative subspace lattice algebra; nonlinear generalized Lie derivation; generalized derivation

设 $\mathcal{A}$ 是任意代数，$\mathcal{M}$ 是其 $\mathcal{A}$-双模。一个可加映射 $d:\mathcal{A}\to\mathcal{M}$ 称为导子，Jordan 导子或 Lie 导子，如果 d 满足对任意 $A,B\in\mathcal{A}$，有 $d(AB)=d(A)B+Ad(B)$，$d(A^2)=d(A)A+Ad(A)$ 或者 $d([A,B])=[d(A),B]+[A,d(B)]$ 成立。设 d 是一个 Lie 导子，若存在一个可加导子 ϕ 和交换子上为零的映射 ξ 使得 $d=\phi+\xi$，则称 Lie 导子 d 具有标准型。特别地，若无可加假设，即对任意 $A,B\in\mathcal{A}$，d 都满足 $d([A,B])=[d(A),B]+[A,d(B)]$，则称 d 是非线性 Lie 导子。

1991 年，Brešar 在文献[1]中引入了广义导子的概念。设 $f:\mathcal{A}\to\mathcal{M}$ 是一个可加映射，如果存在导子 $d:\mathcal{A}\to\mathcal{M}$ 使得对任意 $A,B\in\mathcal{A}$ 有 $f(AB)=f(A)B+Ad(B)$，那么称 f 是广义导子；若满足 $f(A^2)=f(A)A+Ad(A)$，则称 f 是广义 Jordan 导子。Hvala[2] 于 1998 年引入了广义 Lie 导子。设 $f:\mathcal{A}\to\mathcal{M}$ 是一可加映射，如果存在一可加映射 $d:\mathcal{A}\to\mathcal{M}$，使得对任意 $A,B\in\mathcal{A}$ 有

* **收稿日期：**2020－07－01　　**录用日期：**2021－05－18　　**网络首发日期：**2022－01－07

基金项目：国家自然科学基金(11471199)；陕西省教育厅研究计划项目(19JK0929)；咸阳师范学院青蓝人才项目(XSYQL201801)

作者简介：马飞(1981 年生)，男；**研究方向：**算子代数与自由概率；E-mail：mafei6337@sina.com

通信作者：张建华(1965 年生)，男；**研究方向：**算子代数与自由概率；E-mail：jhzhang@snnu.edu.cn

$$f([A,B])=f(A)B-f(B)A+Ad(B)-Bd(A),\tag{1}$$

那么称f是广义 Lie 导子。显然，(广义)导子一定是(广义) Jordan 导子，(广义)导子一定是(广义)Lie 导子，反之一般不成立(如文献[3-4])。关于 Lie 导子或者广义 Lie 导子的一个自然研究课题就是在那些代数上的(广义)Lie 导子具有标准型。如文献[5-9]分别得到了环或者某些代数上的 Lie 导子具有标准型，文献[10-12]研究了上三角矩阵代数、三角代数和 von Neumann 代数上的非线性 Lie 导子，文献[13-14]分别研究了三角代数上的广义 Lie 导子和非线性广义 Lie 导子。

设 H 是实数域或复数域$\mathcal{F}$上的可分 Hilbert 空间，$\mathcal{L}$是 H 上的子空间格，$\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}=\{T\in B(\mathrm{H}):T(L)\subseteq L,\forall L\in\mathcal{L}\}$，是$\mathcal{L}$上的子空间格代数。若$\mathcal{L}$中任意投影是可交换的，则称$\mathcal{L}$是交换子空间格，简称 CSL，一个全序子空间格$\mathcal{N}$称为套；相应地，$\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$和$\mathrm{Alg}\mathcal{N}$称为 CSL 代数和套代数。称 CSL 是完全分配格，如果对$0\neq e\in\mathcal{L}$都有$e=\vee\{L\in\mathcal{L}:N_-\not\supseteq L\}$，其中$N_-=\vee\{P\in\mathcal{L}:P\not\supseteq N\}$. 完全分配的 CSL 代数称为完全分配可交换子空间格代数，简称 CDC-代数。关于完全分配格的标准定义及相关研究内容见文献[15-16]。

由文献[17]可知，CDC-代数是由其包含的秩一算子弱 * 闭生成的算子代数，这个结果对研究 CDC-代数具有重要的意义。在 CDC-代数$\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$中，记$\mathcal{U}(\mathcal{L})=\{e\in\mathcal{L}:\ e\neq 0,e_-\neq \mathrm{H}\}$，称$\mathcal{U}(\mathcal{L})$中的$e,e'$是连通的，如果存在$e_1,e_2,\cdots,e_n\in\mathcal{U}(\mathcal{L})$使得$e_i$与$e_{i+1}$可比，$e_0=e,e_{n+1}=e'(i=0,1,\cdots,n)$. 设$\mathcal{C}\subseteq\mathcal{U}(\mathcal{L})$，称$\mathcal{C}$是$\mathcal{U}(\mathcal{L})$的一个连通分支，如果$\mathcal{C}$中任意两个元素是连通的，并且$\mathcal{C}$中的任何元素与$\mathcal{U}(\mathcal{L})\backslash\mathcal{C}$中的元素都不连通。设$\mathcal{L}$是复可分的 Hilbert 空间 H 上的一个完全分配的交换子空间格，由文献[18]可知，$\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$是不可约的当且仅当其交换子是平凡的，即其一次换位是$\mathcal{F}I$，也等价于$\mathcal{L}\cap\mathcal{L}^\perp=\{0,I\}$，其中$\mathcal{L}^\perp=\{e^\perp:\ e\in\mathcal{L}\}$. 显然，套是完全分配的交换子空间格，也是最重要的模型。Gilfeather 等[18]证明了任何一个 CDC-代数都可以分解成可数个不可约 CDC-代数的直和，这个结果在研究 CDC-代数的同构和导子等问题时具有非常重要的作用，下面我们给出这个结论。

引理 1[18]　设$\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$是复 Hilbert 空间 H 上的 CDC-代数，那么存在$\varepsilon(\mathcal{L})$的可数个连通分支$\mathcal{C}_n:\ n\in\Lambda$，使得$\varepsilon(\mathcal{L})=\cup\{e:e\in\mathcal{C}_n,n\in\Lambda\}$. 令$e_n=\vee\{e:e\in\mathcal{C}_n,n\in\Lambda\}$，则$\{e_n,n\in\Lambda\}\subseteq\mathcal{L}\cap\mathcal{L}^\perp$两两正交，并且

$$\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}=\sum_{n\in\Lambda}\oplus(\mathrm{Alg}\,\mathcal{L})e_n,$$

其中每个$(\mathrm{Alg}\,\mathcal{L})e_n$是 Hilbert 空间$e_n$上的不可约 CDC-代数，这里的收敛指的是强收敛。

下面这个引理对研究不可约 CDC-代数具有非常重要的意义。其证明了不可约 CDC-代数上的 Jordan 同构是一个同构和反同构之和。这个结论在文献[19]中已经给出了证明。

引理 2[19]　设$\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$是 Hilbert 空间 H 上的不可约 CDC-代数，则存在一个非平凡投影$e\in\mathcal{L}$，使得$e(\mathrm{Alg}\,\mathcal{L})e^\perp$是忠实的$\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$-双边模。这里忠实的$\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$-双边模指的是对于任意的$A\in\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$，若$Ae(\mathrm{Alg}\,\mathcal{L})e^\perp=\{0\}$，则有$Ae=0$；若$e(\mathrm{Alg}\,\mathcal{L})e^\perp A=\{0\}$，则有$e^\perp A=0$.

记 H 中的恒等算子为I。若$\mathcal{L}$是非平凡的，即$\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$是非自伴算子代数，则由引理 2 知，存在非平凡投影$e\in\mathcal{L}$，使得$e(\mathrm{Alg}\,\mathcal{L})e^\perp$是忠实的$\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$-双边模。令$e_1=e$，$e_2=I-e$，则$e_1,e_2$均为$\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$中的投影。因而对于任意的不可约 CDC-代数$\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$中的$A$，均可分解为$A=e_1Ae_1+e_1Ae_2+e_2Ae_2$. 记$\mathcal{A}_{ij}=e_i(\mathrm{Alg}\,\mathcal{L})e_j$，因而可将$\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$代数分解为

$$\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}=e_1(\mathrm{Alg}\,\mathcal{L})e_1\oplus e_1(\mathrm{Alg}\,\mathcal{L})e_2\oplus e_2(\mathrm{Alg}\,\mathcal{L})e_2=\mathcal{A}_{11}\oplus\mathcal{A}_{12}\oplus\mathcal{A}_{22}.$$

受上述结论的启发，本文主要研究了完全分配可交换子空间格代数上的非线性广义 Lie 导子。

1　不可约 CDC-代数上的非线性广义 Lie 导子

在本节中，我们先讨论不可约 CDC-代数$\mathrm{Alg}\mathcal{L}$上的非线性广义 Lie 导子。其主要结论如下。

定理 1　设$\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$是复 Hilbert 空间 H 上的不可约 CDC-代数，f: $\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}\to\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$是$\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$上的非线性广义 Lie 导子，$d$是$\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$上与$f$相关的非线性映射。则存在可加导子$\psi$，$\phi:\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}\to\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$，使得对于任意的$A\in\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$，有

$$f(A)=\psi(A)+\xi(A),\qquad d(A)=\phi(A)+\xi(A),$$

其中ξ是$\mathrm{Alg}\mathcal{L}$到其中心且在交换子上为零的映射。

下面通过几个引理来完成定理 1 的证明。

引理 3 设f是满足定理1的非线性广义 Lie导子，则对任意$A_{ij}\in\mathcal{A}_{ij}(i,j=1,2)$有

(i) 存在$\lambda_{A_{11}},\lambda_{A_{22}}\in\mathcal{F}$，使得

$$e_1f(A_{22})e_1=e_1d(A_{22})e_1=\lambda_{A_{22}}e_1,\qquad e_2f(A_{11})e_2=e_2d(A_{11})e_2=\lambda_{A_{11}}e_2 .$$

(ii) $e_1f(e_1)e_2=-e_1d(e_2)e_2$，$e_1f(A_{11})e_2=A_{11}e_1f(e_1)e_2$和$e_1d(A_{22})e_2=e_1d(e_2)e_2A_{22}$.

证明

(i) 由式(1)易得$f(0)=0$，且当$B=I$时，有

$$f(A)-d(A)=f(I)A-Ad(I). \tag{2}$$

令$A=0$即得 $d(0)=f(0)=0$.

对任意$A_{ij}\in\mathcal{A}_{ij}$，由$f(0)=0$和$A_{ii}A_{jj}=0(i\neq j)$知

$$0=f(0)=f(A_{11})A_{22}-f(A_{22})A_{11}+A_{11}d(A_{22})-A_{22}d(A_{11}). \tag{3}$$

上式两边同乘以e_1得$e_1f(A_{22})e_1A_{11}=A_{11}e_1d(A_{22})e_1\subseteq\mathcal{A}_{11}$，从而

$$e_1f(A_{22})e_1=e_1d(A_{22})e_1\in\mathcal{Z}(\mathcal{A}_{11}).$$

注意到$\mathcal{A}_{11}$，$\mathcal{A}_{22}$的中心为$\mathcal{F}e_1$，$\mathcal{F}e_2$，因此存在$\lambda_{A_{22}}\in\mathcal{F}$，使得

$$e_1f(A_{22})e_1=e_1d(A_{22})e_1=\lambda_{A_{22}}e_1.$$

类似存在$\lambda_{A_{11}}\in\mathcal{F}$，使得$e_2f(A_{11})e_2=e_2d(A_{11})e_2=\lambda_{A_{11}}e_2$.

(ii) 在式(3)中左乘e_1右乘e_2，可得

$$e_1f(A_{11})e_2A_{22}=-A_{11}e_1d(A_{22})e_2,\quad A_{ij}\in\mathcal{A}_{ij}.$$

令$A_{11}=e_1$，$A_{22}=e_2$可得$e_1f(e_1)e_2=-e_1d(e_2)e_2$. 上式中分别取$A_{11}=e_1$和$A_{22}=e_2$，有

$$e_1f(A_{11})e_2=A_{11}e_1f(e_1)e_2,\qquad e_1d(A_{22})e_2=e_1d(e_2)e_2A_{22}.$$

由引理 3可知，对任意$A_{11}\in\mathcal{A}_{11}$，定义$\xi_1:\mathcal{A}_{11}\to\mathcal{F}e_2$，则存在$\lambda_{A_{11}}\in\mathcal{F}$，使得

$$\xi_1(A_{11})=e_2f(A_{11})e_2=e_2d(A_{11})e_2=\lambda_{A_{11}}e_2.$$

类似地，定义$\xi_2:\mathcal{A}_{22}\to\mathcal{F}e_1$，则存在$\lambda_{A_{22}}\in\mathcal{F}$，使得

$$\xi_2(A_{22})=e_1f(A_{22})e_1=e_1d(A_{22})e_1=\lambda_{A_{22}}e_1.$$

显然有，$\xi_1([\mathcal{A}_{11},\mathcal{A}_{11}])=\xi_2([\mathcal{A}_{22},\mathcal{A}_{22}])=0$.

引理 4 设f是满足定理 1 的非线性广义 Lie 导子，则$f(\mathcal{A}_{12})$，$d(\mathcal{A}_{12})\subseteq\mathcal{A}_{12}$.

证明 对任意$A_{12}\in\mathcal{A}_{12}$，由$[e_1,A_{12}]=A_{12}=[A_{12},e_2]$得

$$f(A_{12})=f([e_1,A_{12}])=f(e_1)A_{12}-f(A_{12})e_1+e_1d(A_{12})-A_{12}d(e_1), \tag{4}$$

和

$$f(A_{12})=f([A_{12},e_2])=f(A_{12})e_2-f(e_2)A_{12}+A_{12}d(e_2)-e_2d(A_{12}). \tag{5}$$

式(4)和式(5)两边分别乘以e_1和e_2，有

$$2e_1f(A_{12})e_1=e_1d(A_{12})e_1,\quad e_2f(A_{12})e_2=0,\quad e_2d(A_{12})e_2=0,\quad e_1f(A_{12})e_1=0 .$$

从而$f(\mathcal{A}_{12})$，$d(\mathcal{A}_{12})\subseteq\mathcal{A}_{12}$.

对任意$A\in\mathrm{Alg}\mathcal{L}$，令

$$F(A)=f(A)-[A,e_1f(e_1)e_2]-\xi_1(A)-\xi_2(A),$$
$$D(A)=d(A)-[A,e_1d(e_2)e_2]-\xi_1(A)-\xi_2(A).$$

容易验证，F依旧是关于D的非线性广义 Lie 导子，满足对任意$A,B\in\mathrm{Alg}\mathcal{L}$,

$$F([A,B])=F(A)B-F(B)A+AD(B)-BD(A). \tag{6}$$

引理 5

(i) $F(\mathcal{A}_{11})\subseteq\mathcal{A}_{11}$，$F(\mathcal{A}_{22})\subseteq\mathcal{A}_{12}+\mathcal{A}_{22}$;

(ii) $D(\mathcal{A}_{11})\subseteq\mathcal{A}_{11}+\mathcal{A}_{12}$，$D(\mathcal{A}_{22})\subseteq\mathcal{A}_{22}$.

证明　对任意$A_{ii}\in\mathcal{A}_{ii}$，由引理 3 可知

$$\begin{aligned}F(A_{11}) &= f(A_{11})-[A_{11},e_1f(e_1)e_2]-\xi_1(A_{11})-\xi_2(A_{11})\\&= e_1f(A_{11})e_1+e_1f(A_{11})e_2+e_2f(A_{11})e_2-A_{11}e_1f(e_1)e_2-\lambda_{A_{11}}e_2\\&= e_1f(A_{11})e_1\in\mathcal{A}_{11},\\F(A_{22}) &= f(A_{22})-[A_{22},e_1f(e_1)e_2]-\xi_1(A_{22})-\xi_2(A_{22})\\&= e_1f(A_{22})e_1+e_1f(A_{22})e_2+e_2f(A_{22})e_2+e_1f(e_1)e_2A_{22}-\lambda_{A_{22}}e_1\\&= e_1f(A_{22})e_2+e_1f(e_1)e_2A_{22}+e_2f(A_{22})e_2\in\mathcal{A}_{12}+\mathcal{A}_{22}.\end{aligned}$$

类似地可以证明$D(\mathcal{A}_{11})\subseteq\mathcal{A}_{11}+\mathcal{A}_{12}$，$D(\mathcal{A}_{22})\subseteq\mathcal{A}_{22}$.

引理 6　对任意$A,B\in\mathrm{Alg}\mathcal{L}$,

$$F(A+B)-F(A)-F(B)=D(A+B)-D(A)-D(B).$$

证明　对任意$A,B\in\mathrm{Alg}\mathcal{L}$，由$F(A)-D(A)=F(I)A-AD(I)$可得

$$\begin{aligned}F(A+B)-D(A+B) &= F(I)(A+B)-(A+B)D(I)\\&= (F(I)A-AD(I))+(F(I)B-BD(I))\\&= F(A)-D(A)+F(B)-D(B).\end{aligned}$$

因此，$F(A+B)-F(A)-F(B)=D(A+B)-D(A)-D(B)$.

记$\theta(A,B)=F(A+B)-F(A)-F(B)=D(A+B)-D(A)-D(B)$，则有下面的结论。

引理 7　对任意$A_{ij}\in\mathcal{A}_{ij}$，有

$$F(A_{11}A_{12}) = F(A_{11})A_{12}+A_{11}D(A_{12}),\qquad F(A_{12}A_{22}) = F(A_{12})A_{22}+A_{12}D(A_{22}).$$

证明　在式(6)中，取$A=A_{11},B=A_{12}$，由引理 4 和引理 5 可得

$$F(A_{11}A_{12}) = F(A_{11})A_{12}-F(A_{12})A_{11}+A_{11}D(A_{12})-A_{12}D(A_{11}) = F(A_{11})A_{12}+A_{11}D(A_{12}),$$

$$F(A_{12}A_{22}) = F(A_{12})A_{22}-F(A_{22})A_{12}+A_{12}D(A_{22})-A_{22}D(A_{12}) = F(A_{12})A_{22}+A_{12}D(A_{22}).$$

引理 8　对任意$A_{ij}\in\mathcal{A}_{ij}$，有 $\theta(A_{11},A_{12})$，$\theta(A_{12},A_{22})\in\mathcal{F}I$.

证明　对任意$A_{ij},B_{ij}\in\mathcal{A}_{ij}$，由引理 4 和 引理 7 知

$$F(A_{11})B_{12}+A_{11}D(B_{12}) = F(A_{11}B_{12})=F([A_{11}+A_{12},B_{12}]).$$

因此，对任意$B_{12}\in\mathcal{A}_{12}$，有$\theta(A_{11},A_{12})B_{12} = B_{12}\theta(A_{11},A_{12})$，结合引理 4 和引理 5 可知

$$\theta(A_{11},A_{12})+F(A_{12})-e_1F(A_{11}+A_{12})e_2 = e_1F(A_{11}+A_{12})e_1-F(A_{11})+e_2F(A_{11}+A_{12})e_2\in\mathcal{F}I. \tag{7}$$

对任意$A_{12}\in\mathcal{A}_{12}$，由引理 5 知

$$F(A_{12})=F([A_{12},e_2])=F(A_{12})e_2-F(e_2)A_{12}+A_{12}D(e_2)-e_2D(A_{12})=F(A_{12})+A_{12}D(e_2),$$

比较等式两端得，$A_{12}D(e_2)=0$. 由A_{12}的任意性及引理 6 知$D(e_2)=0$. 特别地

$$F(A_{12})=F([A_{11}+A_{12},e_2])=F(A_{11}+A_{12})e_2-e_2D(A_{11}+A_{12}).$$

由$F(\mathcal{A}_{12}),D(\mathcal{A}_{12})\subset\mathcal{A}_{12}$，知$F(A_{12})=e_1F(A_{11}+A_{12})e_2$. 代入式(7)得 $\theta(A_{11},A_{12})\in\mathcal{F}I$.

类似可证$\theta(A_{12},A_{22})\in\mathcal{F}I$.

引理 9　对任意$A_{12},B_{12}\in\mathcal{A}_{12}$，有$\theta(A_{12},B_{12})=0$.

证明　在引理 8 中分别取$A_{11}=e_1$和$A_{22}=e_2$，则存在$\lambda_1,\lambda_2\in\mathcal{F}$，使得$\theta(e_1,A_{12})=\lambda_1I$，$\theta(B_{12},e_2)=\lambda_2I$. 注意到$A_{11}+B_{12}=[e_1+A_{12},B_{12}+e_2]$，从而由引理 3 和引理 4 及$D(e_2)=0$得

$$\begin{aligned}F(A_{12}+B_{12}) &= (F(e_1)+F(A_{12})+\lambda_1I)(B_{12}+e_2)-(F(B_{12})+F(e_2)+\lambda_2I)(e_1+A_{12})\\&\quad+(e_1+A_{12})(D(B_{12})+D(e_2)+\lambda_2I)-(B_{12}+e_2)(D(e_1)+D(A_{12})+\lambda_1I)\\&= F(e_1)B_{12}+F(A_{12})+D(B_{12})=F(A_{12})+F(B_{12}).\end{aligned}$$

由引理 6 得$\theta(A_{12},B_{12})=0$.

在引理 6 中用$B+C$替换B易得

$$F(A+B+C)-F(A)-F(B)-F(C)=D(A+B+C)-D(A)-D(B)-D(C),$$

记为$\theta(A,B,C)$. 则有下面的结论。

引理 10 对任意$A = A_{11} + A_{12} + A_{22} \in \mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$，$A_{ij} \in \mathcal{A}_{ij}$，有$\theta(A_{11}, A_{12}, A_{22}) \in \mathcal{F}I$.

证明 对任意$A_{ij}, B_{ij} \in \mathcal{A}_{ij}$，由于$[A_{11} + A_{12} + A_{22}, B_{12}] = A_{11}B_{12} - B_{12}A_{22} \in \mathcal{A}_{12}$，利用引理 5 和引理 6 得

$$\begin{aligned} F(A_{11}B_{12} - B_{12}A_{22}) &= (F(A_{11}) + F(A_{12}) + F(A_{22}) + \theta(A_{11}, A_{12}, A_{22}))B_{12} - F(B_{12})A_{22} \\ &\quad + A_{11}D(B_{12}) - B_{12}(D(A_{11}) + D(A_{12}) + D(A_{22}) + \theta(A_{11}, A_{12}, A_{22})) \\ &= (F(A_{11})B_{12} + A_{11}D(B_{12})) - (F(B_{12})A_{22} + B_{12}D(A_{22})) \\ &\quad + (\theta(A_{11}, A_{12}, A_{22})B_{12} - B_{12}\theta(A_{11}, A_{12}, A_{22})). \end{aligned}$$

利用引理 7，引理 9 又可得到

$$F(A_{11}B_{12} - B_{12}A_{22}) = (F(A_{11})B_{12} + A_{11}D(B_{12})) - (F(B_{12})A_{22} + B_{12}D(A_{22})).$$

因此对任意$B_{12} \in \mathcal{A}_{12}$，有

$$\theta(A_{11}, A_{12}, A_{22})B_{12} = B_{12}\theta(A_{11}, A_{12}, A_{22}).$$

利用引理 4 和引理 5 可得

$$\begin{aligned} &e_1F(A_{11} + A_{12} + A_{22})e_1 + e_2F(A_{11} + A_{12} + A_{22})e_2 - F(A_{11}) - e_2F(A_{22})e_2 \\ &= \theta(A_{11}, A_{12}, A_{22}) + F(A_{12}) - e_1F(A_{11} + A_{12} + A_{22})e_2 + e_1F(A_{22})e_2 \in \mathcal{F}I. \end{aligned}$$

类似于引理 8 的证明，可得$F(A_{12}) = e_1F(A_{11} + A_{12} + A_{22})e_2 - e_1F(A_{22})e_2$. 进而有$\theta(A_{11}, A_{12}, A_{22}) \in \mathcal{F}I$.

由引理 10，对任意$A = A_{11} + A_{12} + A_{22} \in \mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$，记

$$\theta_0(A) = \theta(A_{11}, A_{12}, A_{22}) = F(A_{11} + A_{12} + A_{22}) - F(A_{11}) - F(A_{12}) - F(A_{22}) = \lambda_A I.$$

引理 11 F, D是可加的广义 Lie 导子。

证明 在引理 10 中，令$A_{11} = e_1, A_{12} = 0, A_{22} = e_2$，由$D(e_2) = 0$知，存在$\lambda_I \in \mathcal{F}$使得

$$D(I) = D(e_1) + D(e_2) + \lambda_I I = D(e_1) + \lambda_I I. \tag{8}$$

则对任意$A_{ij} \in \mathcal{A}_{ij}$，由式(2)知

$$F(A_{12}) - D(A_{12}) = F(I)A_{12} - A_{12}D(I) = (F(I) - \lambda_I)A_{12}, \tag{9}$$

$$F(A_{22}) - D(A_{22}) = F(I)A_{22} - A_{22}D(I) = (F(I) - \lambda_I)A_{22}. \tag{10}$$

因此，将式(9)和式(10)分别代入引理 7 得

$$F(A_{11}A_{12}) = F(A_{11})A_{12} + A_{11}F(A_{12}) - A_{11}(F(I) - \lambda_I)A_{12}, \tag{11}$$

$$F(A_{12}A_{22}) = F(A_{12})A_{22} + A_{12}F(A_{22}) - A_{12}(F(I) - \lambda_I)A_{22}. \tag{12}$$

对任意 $A_{ij}, B_{ij} \in \mathcal{A}_{ij}$，由式(11)得

$$F((A_{11} + B_{11})A_{12}) = F(A_{11} + B_{11})A_{12} + (A_{11} + B_{11})F(A_{12}) - (A_{11} + B_{11})(F(I) - \lambda_I)A_{12}.$$

又由$\theta(A_{11}A_{12}, B_{11}A_{12}) = 0$知

$$\begin{aligned} F((A_{11} + B_{11})A_{12}) &= F(A_{11}A_{12}) + F(B_{11}A_{12}) \\ &= F(A_{11})A_{12} + A_{11}F(A_{12}) - A_{11}(F(I) - \lambda_I)A_{12} \\ &\quad + F(B_{11})A_{12} + B_{11}F(A_{12}) - B_{11}(F(I) - \lambda_I)A_{12}. \end{aligned}$$

从而对任意$A_{12} \in \mathcal{A}_{12}$，有$\theta(A_{11}, B_{11})A_{12} = 0$. 即$\theta(A_{11}, B_{11}) = 0$.

类似可以证明 $\theta(A_{22}, B_{22}) = 0$.

对任意 $A = A_{11} + A_{12} + A_{22}, B = B_{11} + B_{12} + B_{22} \in \mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$，注意到 $\theta(A, B) = \theta(A_{11} + B_{11}, A_{12} + B_{12}, A_{22} + B_{22}) \in \mathcal{F}I$，从而存在$\lambda_A, \lambda_B, \lambda_{A+B} \in \mathcal{F}$使得

$$\begin{aligned} F(A + B) - \theta_0(A + B) &= F(A_{11} + B_{11}) + F(A_{12} + B_{12}) + F(A_{22} + B_{22}) \\ &= (F(A_{11}) + F(A_{12}) + F(A_{22})) + (F(B_{11}) + F(B_{12}) + F(B_{22})) \\ &= (F(A) - \theta_0(A)) + (F(B) - \theta_0(B)), \end{aligned}$$

从而$F - \theta_0$是可加的。注意到$F(A + B) - \theta_0(A + B) = F(A) + F(B)$，由上式可得$\theta_0$也是可加的，进而$F$是可加的广义 Lie 导子。

由引理 6 知，D也是可加的广义 Lie 导子。

引理 12 对任意$A_{ii}, B_{ii} \in \mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$，有

(i) $F(A_{11}B_{11}) = F(A_{11})B_{11} + A_{11}F(B_{11}) - A_{11}(F(I) - \lambda_I)B_{11}$,

(ii) $F(A_{22}B_{22}) = F(A_{22})B_{22} + A_{22}F(B_{22}) - A_{22}(F(I) - \lambda_I)B_{22}$.

证明　对任意$A_{ij}, B_{ij} \in \mathcal{A}_{ij}$，由式(11)知，

$$F(A_{11}B_{11}A_{12}) = F(A_{11}B_{11})A_{12} + A_{11}B_{11}F(A_{12}) - A_{11}B_{11}(F(I) - \lambda_I)A_{12}$$

和

$$\begin{aligned} F(A_{11}B_{11}A_{12}) &= F(A_{11}(B_{11}A_{12})) \\ &= F(A_{11})B_{11}A_{12} + A_{11}F(B_{11})A_{12} + A_{11}B_{11}F(A_{12}) \\ &\quad - A_{11}B_{11}(F(I) - \lambda_I)A_{12} - A_{11}(F(I) - \lambda_I)B_{11}A_{12} \end{aligned}$$

成立。比较上两式可知，对任意$A_{12} \in \mathcal{A}_{12}$，有

$$(F(A_{11}B_{11}) - F(A_{11})B_{11} - A_{11}F(B_{11}) - A_{11}(F(I) - \lambda_I)B_{11})A_{12} = 0.$$

从而由引理2 知

$$F(A_{11}B_{11}) - F(A_{11})B_{11} - A_{11}F(B_{11}) - A_{11}(F(I) - \lambda_I)B_{11} = 0.$$

类似地可以证明 $F(A_{22}B_{22}) = F(A_{22})B_{22} + A_{22}F(B_{22}) - A_{22}(F(I) - \lambda_I)B_{22}$.

定理 1 的证明

对任意$A = A_{11} + A_{12} + A_{22}, B = B_{11} + B_{12} + B_{22} \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}$，由式(10)知，

$$A_{11}F(A_{22}) = A_{11}(F(I) - \lambda_I)A_{22}.$$

从而由引理 4和引理5，引理11 和引理12 及上式可得

$$\begin{aligned} F(AB) - \theta_0(AB) &= F(A_{11}B_{11}) + F(A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}) + F(A_{22}B_{22}) \\ &= F(A_{11})B_{11} + A_{11}F(B_{11}) - A_{11}(F(I) - \lambda_I)B_{11} + F(A_{11})B_{12} + A_{11}F(B_{12}) - A_{11}(F(I) - \lambda_I)B_{12} \\ &\quad + F(A_{12})B_{22} + A_{12}F(B_{22}) - A_{12}(F(I) - \lambda_I)B_{22} + F(A_{22})B_{22} + A_{22}F(B_{22}) - A_{22}(F(I) - \lambda_I)B_{22} \\ &= (F(A) - \theta_0(A))B + A(F(B) - \theta_0(B)) - A(F(I) - \lambda_I)B. \end{aligned}$$

由$\lambda_I = \theta_0(I)$知，$F - \theta_0$是可加的广义导子。由式(3)，引理6 及 θ_0 的定义可知

$$\begin{aligned} (D - \theta_0)(AB) &= F(AB) - \theta_0(AB) - F(I)(AB) + (AB)D(I) \\ &= (F(A) - \theta_0(A))B + A(F(B) - \theta_0(B)) - A(F(I) - \lambda_I)B - F(I)(AB) + (AB)D(I) \\ &= (D(A) + F(I)A - AD(I) - \theta_0(A))B + A(D(B) + F(I)B - BD(I) - \theta_0(B)) \\ &\quad - A(F(I) - \lambda_I)B - F(I)(AB) + (AB)D(I) \\ &= (D(A) - \theta_0(A))B + A(D(B) - \theta_0(B)) - A(D(I) - \lambda_I)B. \end{aligned}$$

因此，$D - \theta_0$也是可加的广义导子。

下面说明$\theta_0([\mathrm{Alg}\mathcal{L}, \mathrm{Alg}\mathcal{L}]) = 0$. 由$F(\mathcal{A}_{11}) \subset \mathcal{A}_{11}$ 知

$$e_1F(A)e_1 - F(A_{11}) = e_1\theta_0(A)e_1 = e_1D(A)e_1 - e_1D(A_{11})e_1 \in \mathcal{F}I.$$

特别地，在式(6)中取$A = A_{11}, B = B_{11} \in \mathcal{A}_{11}$，利用引理5可得

$$A_{11}D(B_{11})e_2 = B_{11}e_1D(A_{11})e_2.$$

因此，对任意$A, B \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}$，易得

$$\begin{aligned} e\theta_0([A, B])e_1 &= e_1F([A, B])e_1 - F([e_1Ae_1, e_1Be_1]) \\ &= [e_1\theta_0(A)e_1, e_1Be_1] + [e_1Ae_1, e_1\theta_0(B)e_1] = 0. \end{aligned}$$

类似地，$e_2\theta_0([A, B])e_2 = 0$，从而有 $\theta_0([\mathrm{Alg}\mathcal{L}, \mathrm{Alg}\mathcal{L}]) = 0$.

对任意$A \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}$，由$F, D$以及$\theta_0$的定义可得，

$$f(A) = (F(A) - \theta_0(A))) + [A, e_1f(e_1)e_2] + \xi_1(A) + \xi_2(A) + \theta_0(A)$$

和

$$d(A) = (D(A) - \theta_0(A))) + [A, e_1d(e_2)e_2] + \xi_1(A) + \xi_2(A) + \theta_0(A).$$

令　$\psi(A) = (F(A) - \theta_0(A)) + [A, e_1f(e_1)e_2]$，$\phi(A) = (D(A) - \theta_0(A)) - [A, e_1d(e_2)e_2], \xi(A) = \xi_1(A) + \xi_2(A)+\theta_0(A)$.

由前面证明可知，ψ, ϕ 均是不可约的 CDC-代数 $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$ 上可加的广义导子，ξ 是不可约的 CDC-代数 $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$ 到其中心 $\mathcal{F}I$ 且在交换子上为零的映射，且有

$$f(A) = \psi(A) + \xi(A),\ d(A) = \phi(A) + \xi(A).$$

2 CDC-代数上的非线性广义 Lie 导子

下面研究任意CDC-代数上的非线性广义 Lie 导子。本文的主要结论如下

定理 2 设$\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$是复 Hilbert 空间 H 上的完全分配可交换子空间格代数，f是$\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$上的非线性广义 Lie 导子，$d$是$\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$上与$f$相关的非线性映射。则存在可加导子$\psi,\phi$: $\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}\to\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$使得对任意$A\in\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$有

$$f(A)=\psi(A)+\xi(A)\quad 和\quad d(A)=\phi(A)+\xi(A),$$

其中ξ是$\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$到其中心且在交换子上为零的映射。

证明 设$e_n=V\{e: e\in\mathcal{C}_n, n\in\Lambda\}$为引理 1 中的投影，由引理 1 知，任意的完全分配可交换子空间格代数$\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$均可分解为不可约的情形，即$\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}=\sum_{n\in\Lambda}\oplus(\mathrm{Alg}\,\mathcal{L})e_n$，则对任意$e_n$有

$$(\mathrm{Alg}\,\mathcal{L})e_n=e_n(\mathrm{Alg}\,\mathcal{L})e_n=\mathrm{Alg}(e_n\mathcal{L}).$$

由于$e_n=V\{e: e\in\mathcal{C}_n, n\in\Lambda\}$是 Hilbert 空间 H 中的投影，自然也是 Hilbert 空间。因此，$(\mathrm{Alg}\,\mathcal{L})e_n$是一作用在 Hilbert 空间$e_n$上的不可约CDC-代数，并且这里的收敛是强收敛。因而由e_n的定义可知，其线性张是整个 Hilbert 空间 H，并且两两正交，$\mathrm{Alg}\mathcal{L}$的单位元为$I=\sum_{n\in\Lambda}\oplus e_n$，中心元为$\mathcal{Z}(\mathrm{Alg}\,\mathcal{L})=\sum_{n\in\Lambda}\oplus\lambda_n e_n$，其中$\lambda_n\in\mathcal{F}$.

对任意$A\in\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$和投影$e_n$，$(\mathrm{Alg}\,\mathcal{L})e_n$均是 Hilbert 空间$e_n$上的不可约CDC-代数。设$f,d$满足式(1)，且$f_n,d_n$分别为$f,d$在$\mathrm{Alg}(e_n\mathcal{L})$上的限制，即在$\mathrm{Alg}(e_n\mathcal{L})$上有$f=f_n, d=d_n$. 由定理 1 可知，存在可加导子$\psi_n,\phi_n:\mathrm{Alg}(e_n\mathcal{L})\to\mathrm{Alg}(e_n\mathcal{L})$和在交换子上为零的映射$\xi_n:\mathrm{Alg}(e_n\mathcal{L})\to\mathcal{F}e_n$使得对任意$A\in\mathrm{Alg}(e_n\mathcal{L})$,

$$f_n(A)=\psi_n(A)+\xi_n(A)\quad 和\quad d_n(A)=\phi_n(A)+\xi_n(A).$$

在引理3中，对于每一个广义导子ψ_n均存在一个导子，设为τ_n，使得对于任意的$A,B\in\mathrm{Alg}(e_n\mathcal{L})$有，$\psi_n(AB)=\psi_n(A)B+A\tau_n(B)$. 又由文献[17]，CDC-代数是由其包含的秩一算子弱*闭生成的算子代数，则任取$E\in\mathcal{U}(\mathcal{L})$，$x\in E$，固定$y\in E_-^\perp$，有$x\otimes y\in\mathrm{Alg}(e_n\mathcal{L})$且是一秩算子。任取一秩算子$u\otimes v\in\mathrm{Alg}(e_n\mathcal{L})$，则对任意$A\in\mathrm{Alg}(e_n\mathcal{L})$，有

$$\psi_n\big((u\otimes v)A(x\otimes y)\big)=\psi_n(u\otimes v)A(x\otimes y)+(u\otimes v)\tau_n(A)(x\otimes y)+(u\otimes v)A\tau_n(x\otimes y)$$

设$\{A_k\}$，$A\in\mathrm{Alg}(e_n\mathcal{L})$，并且$\{A_k\}$强收敛到$A$，由上式可知，当$k\to\infty$时

$$(u\otimes v)\tau_n(A_k)(x\otimes y)=\psi_n\big((u\otimes v)A_k(x\otimes y)\big)-\psi_n(u\otimes v)A_k(x\otimes y)-(u\otimes v)A_k\tau_n(x\otimes y)$$

收敛到

$$\psi_n\big((u\otimes v)A(x\otimes y)\big)-\psi_n(u\otimes v)A(x\otimes y)-(u\otimes v)A\tau_n(x\otimes y)=(u\otimes v)\tau_n(A)(x\otimes y).$$

由一秩算子$u\otimes v\in\mathrm{Alg}(e_n\mathcal{L})$的任意性得，$\tau_n$是强收敛的，进而$\psi_n$也强收敛。

下面证明在任意CDC-代数$\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$上结论也成立。设$\{A_k\}$，$\{B_k\}$，$A$，$B\in\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}$，并且$\{A_k\}$，$\{B_k\}$强收敛到$A$，$B$. 因为$\mathrm{Alg}\,\mathcal{L}=\sum_{n\in\Lambda}\oplus(\mathrm{Alg}\,\mathcal{L})e_n$，并且$e_n$是两两正交的投影，所以对每个投影$e_i$，$\{A_ke_i\}$，$\{B_ke_i\}$强收敛到$Ae_i$，$Be_i$并且

$$A_kB_k=\left(\sum_{i\in\Lambda}\oplus A_ke_i\right)\left(\sum_{i\in\Lambda}\oplus B_ke_i\right)=\sum_{i\in\Lambda}\oplus A_kB_ke_i.$$

则对于Hilbert 空间H中的任意元x，注意到ψ_n，ξ_n的定义，并结合定理1的证明可知，当$k\to\infty$时

$$\begin{aligned}f([A_k,B_k])x&=f\left(\sum_{i\in\Lambda}\oplus A_ke_i\sum_{i\in\Lambda}\oplus B_ke_i-\sum_{i\in\Lambda}\oplus B_ke_i\sum_{i\in\Lambda}\oplus A_ke_i\right)x\\&=\sum_{i\in\Lambda}\oplus f_i(A_ke_iB_ke_i-B_ke_iA_ke_i)x=\sum_{i\in\Lambda}\oplus\psi_i([A_ke_i,B_ke_i])x\end{aligned}$$

收敛到

$$\sum_{i\in\Lambda}\oplus\psi_i([Ae_i,Be_i])x=\sum_{i\in\Lambda}\oplus f_i([Ae_i,Be_i])x=f([A,B])x,$$

即f是强收敛的，进而d也强收敛。因而对任意$A\in\mathrm{Alg}\mathcal{L}$都有$f(A)=\sum_{n\in\Lambda}f_n(Ae_n)$. 因为$f_n(Ae_n)=\psi_n(Ae_n)+$

$\xi_n(Ae_n)$，$d_n(Ae_n)=\phi_n(Ae_n)+\xi_n(Ae_n)$，则对任意 $A\in\mathrm{Alg}\mathcal{L}$ 有

$$f(A)=\sum_{n\in\Lambda}\oplus f_n(Ae_n)=\sum_{n\in\Lambda}\oplus\big(\psi_n(Ae_n)+\xi_n(Ae_n)\big)=\sum_{n\in\Lambda}\oplus\psi_n(Ae_n)+\sum_{n\in\Lambda}\oplus\xi_n(Ae_n)$$

和

$$d(A)=\sum_{n\in\Lambda}\oplus d_n(Ae_n)=\sum_{n\in\Lambda}\oplus\big(\phi_n(Ae_n)+\xi_n(Ae_n)\big)=\sum_{n\in\Lambda}\oplus\phi_n(Ae_n)+\sum_{n\in\Lambda}\oplus\xi_n(Ae_n).$$

令 $\psi(A)=\sum_{n\in\Lambda}\oplus\psi_n(Ae_n)$，$\phi(A)=\sum_{n\in\Lambda}\oplus\phi_n(Ae_n)$，$\xi(A)=\sum_{n\in\Lambda}\oplus\xi_n(Ae_n)$，则对任意 $A\in\mathrm{Alg}\mathcal{L}$ 都有

$$f(A)=\psi(A)+\xi(A)\qquad 和\qquad d(A)=\phi(A)+\xi(A).$$

证毕

参考文献：

[1] BREŠAR M. On the distance of the composition of two derivations to the generalized derivations [J]. Glasgow Math J, 1991, 33(1): 89-93.

[2] HVALA B. Generalized derivations in rings [J]. Communications in Algebra, 1998, 26(4): 1147-1166.

[3] BENKOVIČ D. Jordan derivations and anti-derivations on triangular matrices [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2005, 397(1): 235-244.

[4] MA F, JI G X. Generalized Jordan derivation on triangular matrix algebra [J]. Linear and Multilinear Algebra, 2007, 55(4): 355-363.

[5] MARTINDALE W S. Lie derivations of primitive rings [J]. Michigan Math J, 1964, 11(2): 183-187.

[6] MIERS C R. Lie derivations of von Neumann algebras [J]. Duke Math J, 1973, 40(2): 403-409.

[7] ZHANG J H. Lie derivations on nest subalgebras of von Neumann algebras [J]. Acta Math Sinica, 2003, 46(4): 657-664.

[8] CHEUNG W S. Lie derivation of triangular algebras [J]. Linear and Multilinear Algebra, 2003, 51(3): 299-310.

[9] MATHIEU M, VILLENA A R. The structure of Lie derivations on C^*-algebras [J]. J Funct Anal, 2003, 202(2): 504-525.

[10] CHEN L, ZHANG J H. Nonlinear Lie derivation on upper triangular matrix algebras [J]. Linear and Multilinear Algebra, 2008, 56(6): 725-730.

[11] YU W Y, ZHANG J H. Nonlinear Lie derivations of triangular algebras [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2010, 432(11): 2953-2960.

[12] BAI F, DU S P. The structure of nonlinear Lie derivation on von Neumann algebras [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2012, 436(7): 2701-2708.

[13] BENKOVIČ D. Generalized Lie derivations on triangular algebras [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2011, 434(6): 1532-1544.

[14] FEI X H, ZHANG J H. Nonlinear generalized Lie derivations on triangular algebras [J]. Linear and Multilinear Algebra, 2017, 65(6): 1158-1170.

[15] LAMBROU M S. Complete distributivity lattices [J]. Fundamental Math, 1983, 119(3): 227-240.

[16] 马飞,张建华,贺雯. CDC-代数上的广义Jordan中心化子[J]. 山东大学学报(理学版), 2015, 50(6): 83-88.

[17] LAURIE C, LONGSTAFF W. A note on rank-one operators in reflexive algebras [J]. Proc Amer Math Soc, 1983, 89(2): 293-297.

[18] GILFEATHER F, MOORE R L. Isomorphisms of certain CSL algebras [J]. J Funct Anal, 2010, 67(2): 264-291.

[19] LU F Y. Lie derivations of certain CSL algebras [J]. Israel J Math, 2006, 155(1): 149-156.

（责任编辑　冯兆永）